4.1 Wartość statystyki ilorazu wiarygodności dla hipotez H_0 vs H_1, obliczona dla pewnej próby, ma wartość w. Jakie powinno być w aby hipoteza H_1 była λ razy bardziej wiarygodna od hipotezy H_0? Uzupełnij tabelę

λ	1.5	2	3	5	10
w					

4.2 Wnioskowanie dla rozkładu Poissona można często oprzeć na jego związku z rozkładem dwumianowym albo wielomianowym.

4.2.1 Pokaż jak można testować hipotezy o wartościach oczekiwanych w dwóch próbach o liczbach sukcesów y_1 i y_2 w rozkładzie Poissona z wartościami oczekiwanymi μ_1 i μ_2 :

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \; vs \; H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

używając odpowiedniego testu o wartości prawdopodobieństwa π w rozkładzie dwumianowym.

4.2.2 Skonstruuj na tej podstawie przedział ufności dla ilorazu $\frac{\mu_1}{\mu_2}$. Zbuduj 95% i 99% przedział ufności dla ilorazu $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ gdy $y_1 = 4$ i $y_2 = 6$.

Wskazówka. Przy warunku $n = y_1 + y_2$ liczba sukcesów y_1 ma rozkład dwumianowy o n próbach z prawdopodobieństwem sukcesu $\pi = \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$. Udowodnij to.

4.3 Metoda konstrukcji przedziału ufności oparta na ogonach rozkładu polega na wyliczeniu oszacowania nieznanego parametru na podstawie prawdopodobieństw: $P(Y \geqslant y) = \frac{\alpha}{2}$ i $P(Y \leqslant y) = \frac{\alpha}{2}$.

4.3.1 Oblicz tą metodą przedział ufności dla parametru π na poziomie $1-\alpha$ dla rozkładu geometrycznego $P(Y = y) = \pi^y (1-\pi)$. Zbuduj 95% i 99% przedział ufności dla π gdy $y = 4$.

4.3.2 Pokaż, że jeśli $\pi < 1 - \frac{\alpha}{2}$ to przedział ten można skrócić nie zmniejszając poziomu ufności.

4.4 Prawo Hardy'ego-Weinberga mówi, że genotypy AA, Aa i aa występują z prawdopodobieństwami $\theta^2, 2\theta(1-\theta), (1-\theta)^2$. W n-elementowej próbie uzyskano n_1 obiektów o genotypie AA, n_2 obiektów o genotypie Aa, n_3 obiektów o genotypie aa. Zakładamy, że prawo $H - W$ jest prawdziwe.

4.4.1 Oblicz estymatory największej wiarygodności dla θ oraz prawdopodobieństw genotypów AA, Aa i aa.

4.4.2 W próbie uzyskano $n_1 = 10$, $n_2 = 20$, $n_3 = 30$. Czy dla takich danych prawdziwe jest prawo $H - W$?

4.4.3 Pokaż, że gdy $L(\theta)$ jest logarytmem funkcji wiarygodności dla parametru θ to

$$\frac{-\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{2n_1 + n_2}{\theta^2} + \frac{n_2 + 2n_3}{(1-\theta)^2}$$

i że informacja Fishera ma wartość $\frac{2n}{\theta(1-\theta)}$. Oszacuj na tej podstawie wariancję estymatora NW $\hat{\theta}$. Jaka jest ta wariancja dla danych z 4.4.2?

4.5 Obserwowano n cieląt. Niech $n_1$jest zaobserwowaną liczbą cieląt, które uległy pierwotnemu zakażeniu gruźlicą, n_2 liczbą cieląt, które uległy wtórnemu zakażeniu gruźlicą,n_3 liczbą cieląt, które uległy trzeciemu zakażeniu gruźlicą. Zakładając, że prawdopodobieństwa warunkowe: wtórnego zachorowania, gdy cielę uległo pierwotnemu zachorowaniu i trzeciego zachorowania, gdy uległo pierwszym dwom zachorowaniom są równe prawdopodobieństwu pierwotnego zachorowania π, oszacuj metodą największej wiarygodności wartość tego parametru.